

УДК 539.3

Д. Максимчук

Хмельницький національний університет

## КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ СПІВВІСНИХ ШТАМПІВ І ШАРУ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

**Резюме.** У рамках лінеаризованої теорії пружності представлено осесиметричну змішану задачу про тиск двох співвісних пружних циліндричних штампів на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження представлені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

**Ключові слова:** лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, перетворення Ханкеля, інтегральні рівняння типу Фредгольма, метод послідовних наближень.

D. Maksymchuk

## THE CONTACT PROBLEM FOR TWO PRESTRESSED CYLINDRICAL COAXIAL PUNCHES AND A LAYER WITH INITIAL (RESIDUAL) TENSION

**Summary.** The article deals with the coaxial mixed type task of measuring pressure of prestressed two coaxial cylinder punches upon a layer with initial (residual) stresses within the framework of linear elasticity theory. We consider the cases in the absence of the friction forces. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential. It is assumed that elastic potentials are two continuously differentiated functions of algebraic invariants of the Green tensor deformation (the initial states of the layer and of cylindrical punches remains uniform and equal). The research is carried out within the coordinates of the initial deformed state, which are interrelated with the Lagrangian coordinates (natural state). Besides, it is also assumed that the influence of the die causes small disorders of the main elastic deformed state.

It is assumed that the elastic dies as well as the layer are made of different isotropous, transversely isotropic or composite materials and they are interacting on one of the dies surfaces.

The mode of deformation in elastic layer with initial (residual) stress will be defined with the help of harmonic functions as the Henkel integrals. We should note, although the Henkel-method does not provide exact solutions, but it lets us reduce the task to the Fredholm equations, which let us use the method of consecutive approximations. Consequently we got a components of potential vector and tenzor of deformations in the case of unequal roots of axis-symmetrical type task.

So, the received solutions are defined by lines with the help of very many constants. These constants are defined with two systems of regular linear algebraic equations. The research was carried out on the problem of the influence of initial stresses on the law of distribution of contact disorders in the elastic layer with initial (residual) stresses.

**Key words:** linear elasticity theory, initial (residual) stresses, Henkel transformations, theory of small initial deformations, Fredholm equations.

**Умовні позначення:**

$E$  – модуль пружності 1 роду;

$\lambda_i$  – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового (залишкового) стану;

$y_i$  – координати початкового деформованого стану;  
 $x_i$  – лагранжеві координати;  
 $h_1$  – товщина шару в початковому деформованому стані;  
 $h_2$  – товщина шару в недеформованому стані;  
 $\varepsilon_+$ ,  $\varepsilon_-$  – осьові переміщення торців штампів;  
 $H^{(i)}$  – довжини пружних штампів циліндричної форми ( $i=1, 2$ );  
 $R^{(i)}$  – радіуси пружних штампів циліндричної форми ( $i=1, 2$ );  
 $J_\nu(x)$ ,  $I_\nu(x)$  – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу.

**Вступ.** Як відомо, спектр використання пружних тіл з початковими (залишковими) напруженнями досить широкий. Особливо це стосується розрахунку важких фундаментних плит і будівельних перекриттів, що знаходяться в полі дії гравітаційних сил; вивчення проблеми передавання навантаження у конструкціях та деталях машин за допомогою їх контактної взаємодії тощо. Тому є досить актуальним проведення нових теоретичних досліджень впливу початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружних тіл. Методи, що розвиваються в теорії контактних задач, дозволяють знайти розподіл тиску в місцях взаємодії, вивчити концентрацію напружень та розробити критерії їх зменшення, а також дослідити напружено-деформівний стан в усьому тілі.

Не зважаючи на існуючі досягнення в теорії контактної взаємодії пружних тіл, все ще залишаються недостатньо розроблені ряд проблем. Серед них – контактна осесиметрична взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями, а саме: тиску двох попередньо напружених співвісних штампів на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Оскільки один із аспектів сучасної проблеми передавання навантаження пов'язаний з якісно новим підходом – урахуванням залишкових напружень у тілах на закон розподілу тиску в місцях їх дотику, то розрахунок важливих елементів конструкцій та їх створення дозволить ефективніше враховувати міцність матеріалів шляхом правильного оцінювання запасів міцності та достатньо знижувати їх матеріаломісткість, зберігаючи у цілому потрібні функціональні характеристики.

На сьогодні для проблем, які відносяться до контактних задач пружних тіл, у рамках класичних постановок отримано результати досліджень, що охоплюють широке коло питань. Вони відображені у численних публікаціях періодичних видань. Детальний огляд задач контактної взаємодії пружних тіл із початковими напруженнями представлений у роботах [1–4]. Дослідження питання контактної взаємодії кінцевого циліндричного штампу на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями розглянуто у роботі [5]. Задачі про тиск без тертя жорсткого кругового штампу на шар з початковими напруженнями присвячена робота [6], у якій лінеаризована осесиметрична задача розв'язана в загальному вигляді. У статті [7] розглянуто просторову задачу про тиск пружного штампу довільного поперечного перетину на пружний півпростір без урахування сил тертя, а в роботах [8–9] представлено розв'язки осесиметричної задачі про тиск попередньо напруженого циліндра скінченної довжини на пружний шар з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл.

У даній роботі з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [4, 10] представлено розв'язок змішаної осесиметричної статичної задачі про контактну взаємодію двох співвісних пружних циліндричних штампів з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями. Розглянуто випадок коли шар деформується під дією тиску двох співвісних кругових штампів кінцевої довжини та різних радіусів і висоти без урахування сил тертя після виникнення у них

початкового деформованого стану. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Вважаємо, що початкові стани у шарі та штампах однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [4]. Крім того, дія штампів викликає в шарі мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

Дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану  $Oy_i$ , які пов'язані з лагранжевими координатами співвідношеннями  $y_i = \lambda_i x_i \quad (i = \overline{1,3})$ .

Величини, які відносяться до верхнього пружного штампу, будемо записувати з верхнім індексом (1), а величини, які відносяться до нижнього пружного штампу – з верхнім індексом (2), а для пружного шару – без індексу.

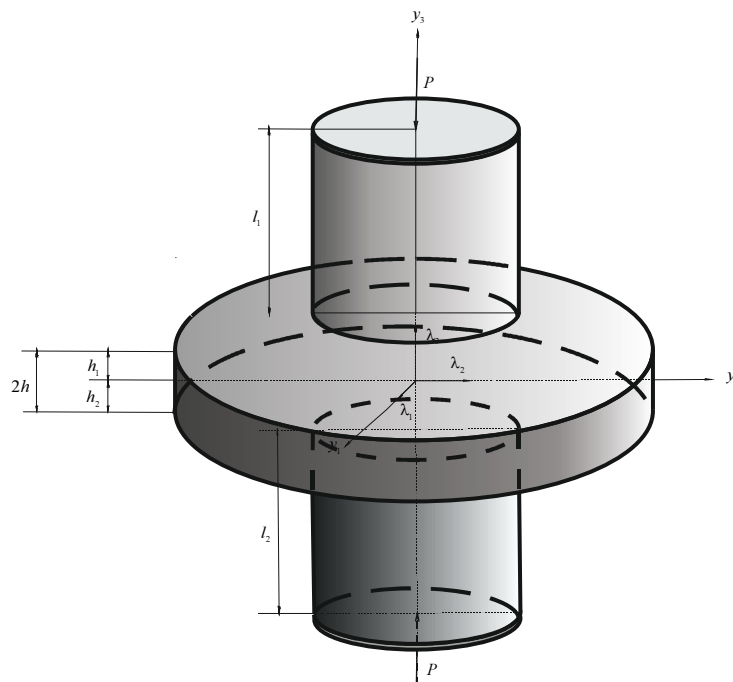


Рисунок 1. Тиск двох співвісних циліндричних штампів на шар з початковими напруженнями

Figure 1. The pressure of two coaxial cylindrical punches on a layer with initial stresses

**Метою даної роботи є розв'язок змішаної осесиметричної статичної задачі про контактну взаємодію двох співвісних пружних циліндричних штампів з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями у рамках лінеаризованої теорії пружності.**

**Постановка задачі й основні співвідношення.** Нехай пружний необмежений шар з початковими напруженнями деформується під дією тиску двох співвісних попередньо напружених циліндричних штампів (рис.1.) різної висоти і радіусів. Товщина шару в початковому деформованому стані пов'язана з товщиною у недеформованому стані відношенням  $h_1 = \lambda_3 h_2$ . Зовнішнє навантаження  $P$  викликає переміщення вільних торців у напрямку осі симетрії  $Oy_3$ . Бокові поверхні штампів, а

також поверхні шару за межею контакту вільні від зовнішніх зусиль. В області контакту тіл дотичними зусиллями нехтуємо.

Рахуючи, що пружні штампи виготовлені із різних ізотропних, трансверсально-ізотропних матеріалів, а переміщення торців штампів задано величинами  $\varepsilon_+$  і  $\varepsilon_-$  – для визначення складових вектора переміщення і тензора напруження у пружних штампах і шарі, маємо такі граничні умови:

1) на торцях пружних штампів з початковими напруженнями

$$u_z^{(1)} = -\varepsilon_+; \tau_{rz}^{(1)} = 0; \forall(r) \in [0, R_1], y_3 = h + H_1, \quad (1)$$

$$u_z^{(2)} = -\varepsilon_-; \tau_{rz}^{(2)} = 0; \forall(r) \in [0, R_2], y_3 = -h - H_2; \quad (2)$$

2) на боковій поверхні пружних штампів

$$\sigma_z^{(1)} = 0; \tau_{rz}^{(1)} = 0; \forall(y_3) \in [0, H_1], r = R_1, \quad (3)$$

$$\sigma_z^{(2)} = 0; \tau_{rz}^{(2)} = 0; \forall(y_3) \in [0, H_2], r = R_2; \quad (4)$$

3) на межі пружного шару в області контакту

$$u_3 = u_z^{(1)}; \tilde{Q}_{33} = \sigma_z^{(1)}; \tilde{Q}_{3r} = \tau_{rz}^{(1)} = 0, \forall(r) \in [0, R_1], y_3 = -h_1, \quad (5)$$

$$u_3 = u_z^{(2)}; \tilde{Q}_{33} = \sigma_z^{(2)}; \tilde{Q}_{3r} = \tau_{rz}^{(2)} = 0, \forall(r) \in [0, R_2], y_3 = -h_2; \quad (6)$$

4) на межі пружного шару поза областю контакту

$$\tilde{Q}_{33} = \tilde{Q}_{3r} = 0, \forall(r) \in [r, +\infty], y_3 = \pm h. \quad (7)$$

Умови рівноваги приводять до співвідношення

$$\int_0^{R_1} \rho \cdot Q_{33}(0, \rho) \Big|_{y_3=h_1} d\rho = \int_0^{R_2} \rho \cdot Q_{33}(0, \rho) \Big|_{y_3=h_2} d\rho.$$

Рівнодіюча зовнішніх сил визначається рівністю

$$P = -2\pi \int_0^{R_1} \rho \cdot Q_{33}(0, \rho) \Big|_{y_3=h_1} d\rho = -2\pi \int_0^{R_2} \rho \cdot Q_{33}(0, \rho) \Big|_{y_3=h_2} d\rho.$$

Крім того, у випадку осесиметричної задачі використовуємо циліндричні координат  $(r, \theta, z_i)$   $(i=1, 2)$ , де  $z_i = y_3 n_i^{-0,5}$ .

Загальний розв'язок  $\tilde{\chi}^{(i)} = \tilde{\chi}_1^{(i)} + \tilde{\chi}_2^{(i)}$  поставленої задачі для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$  будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^{(i)} = & \frac{(z_1 + z_2)E^{(i)}}{H^{(i)}} (3r^2 - 2(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2)) \chi_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ b_2^{(i,k)} \left[ s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R^{(i)})}{I_1(\gamma_k v_1 R^{(i)})} I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \right. \\ & \left. + J_0(\alpha_k^{(i)} r) [\tilde{S}_2(\alpha_k^{(i)} z_1) + \tilde{S}_3(\alpha_k^{(i)} z_2)] \right\} \chi_k^{(i)}, \quad (i=1, 2). \end{aligned} \quad (8)$$

Для визначення напружено-деформівного стану у пружних циліндрах використовуємо лінеаризовані рівняння [4], з яких випливають вирази для компонент вектора переміщення і тензора напруження для стисливих і нестисливих тіл.

$$\begin{aligned} u_r^{(i)} = & -\frac{6\theta^+ E^{(i)}}{H^{(i)}} r \chi_0^{(i)} - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_2^{(i,k)} \left[ s_0 v_1 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R^{(i)})}{I_1(\gamma_k v_1 R^{(i)})} I_1(v_1 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) - v_2 I_1(v_2 \gamma_k r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] - \right. \\ & \left. - \alpha_k^{(i)2} J_1(\alpha_k^{(i)} r) \left( \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k^{(i)} z_1)}{v_1} + \frac{\tilde{S}_5(\alpha_k^{(i)} z_2)}{v_2} \right) \right\} \chi_k^{(i)}, \quad (i=1, 2); \\ u_3^{(i)} = & \frac{12E^{(i)}}{H^{(i)}} \left[ \frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right] \chi_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^2 b_2^{(i,k)} \left[ s_0 m_1 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R^{(i)})}{I_1(\gamma_k v_1 R^{(i)})} I_0(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] - \right. \\ & \left. - \alpha_k^{(i)2} J_0(\alpha_k^{(i)} r) \left( \frac{m_1 \tilde{S}_2(\alpha_k^{(i)} z_1)}{n_1} + \frac{m_2 \tilde{S}_3(\alpha_k^{(i)} z_2)}{n_2} \right) \right\} \chi_k^{(i)}, \quad (i=1, 2); \\ \sigma_3^{(i)} = & \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 b_2^{(i,k)} \left[ n_1 s_0 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R^{(i)})}{I_1(\gamma_k v_1 R^{(i)})} I_0(\gamma_k v_1 r) \cos(\gamma_k z_1 v_1) + s n_2 I_0(\gamma_k v_2 r) \cos(\gamma_k z_2 v_2) \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_k^{(i)3} J_0(\alpha_k^{(i)} r) \left( \frac{\tilde{S}_4(\alpha_k^{(i)} z_1)}{v_1} + \frac{s \tilde{S}_5(\alpha_k^{(i)} z_2)}{v_2} \right) \right\} \chi_k^{(i)} + \frac{12E^{(i)}}{H^{(i)}} \left[ \frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] \chi_0^{(i)} \right\rangle C_{44} (1 + m_1) l_1, \quad (i=1, 2); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tau_{3r}^{(i)} = & C_{44} (1 + m_1) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 s_0 b_2^{(i,k)} \left[ v_1 \frac{I_1(\gamma_k v_2 R^{(i)})}{I_1(\gamma_k v_1 R^{(i)})} I_1(\gamma_k v_1 r) \sin(\gamma_k z_1 v_1) - v_2 I_1(\gamma_k v_2 r) \sin(\gamma_k z_2 v_2) \right] + \right. \\ & \left. + \alpha_k^{(i)3} J_1(\alpha_k^{(i)} r) \left[ \frac{1}{n_1} \tilde{S}_2(\alpha_k^{(i)} z_1) + \frac{s_0}{n_2} \tilde{S}_3(\alpha_k^{(i)} z_2) \right] \right\} \chi_k^{(i)}, \quad (i=1, 2), \end{aligned}$$

$$\text{де } \theta^+ = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}, \quad \theta_7 = (1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1) v_1^{-1} + (1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_2) v_2^{-1};$$

$$\begin{aligned} b_2^{(i,k)} = & \frac{2\varepsilon \alpha_k^{(i)2} n_1 s_0 J_0(\mu_k^{(i)}) I_1(\gamma_k v_1 R^{(i)})}{\omega_1 \gamma_k^3 H^{(i)} (m_1 s_0 - m_2) (v_2 I_1(\gamma_k v_1 R^{(i)}) F_k(2; R^{(i)}) - s_0 v_1 I_1(\gamma_k v_2 R^{(i)}) F_k(1; R^{(i)}))} \left[ \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{v_1 (\alpha_k^{(i)2} + \gamma_k^2 n_1)} ch \left( \frac{\mu_k^{(i)} l}{v_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{v_2 (\alpha_k^{(i)2} + \gamma_k^2 n_2)} ch \left( \frac{\mu_k^{(i)} l}{v_2} \right) \left( 2 + \frac{n_2}{n_1 s_0} \right) \right], \quad F_k(i; x) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_i) I_0(\gamma_k v_i x) + \frac{1 - \tilde{c}_0}{x \gamma_k v_i} I_1(\gamma_k v_i x); \end{aligned}$$

$$s_0 = \frac{1+m_2}{1+m_1}, \quad s_1 = \frac{m_1-1}{m_1}, \quad s_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{v_1}{v_2}, \quad s_3 = s_0 \frac{v_1}{v_2}, \quad s = s_0 \frac{l_2}{l_1};$$

$$\tilde{S}_2(\alpha_k^{(i)} z_1) = \frac{n_1 R^{(i)2} s_0 \varepsilon_{\pm}}{\omega_1 \mu_k^{(i)2} (m_1 s_0 - m_2)} \left[ cth \left( \frac{\mu_k^{(i)} l}{v_1} \right) sh(\alpha_k^{(i)} z_1) - ch(\alpha_k^{(i)} z_1) \right];$$

$$\tilde{S}_4(\alpha_k^{(i)} z_1) = \frac{n_1 R^{(i)2} s_0 \varepsilon_{\pm}}{\omega_1 \mu_k^{(i)2} (m_1 s_0 - m_2)} \left[ cth \left( \frac{\mu_k^{(i)} l}{v_1} \right) ch(\alpha_k^{(i)} z_1) - sh(\alpha_k^{(i)} z_1) \right];$$

$$\tilde{S}_3(\alpha_k^{(i)} z_2) = \frac{n_2 R^{(i)2} \varepsilon_{\pm}}{\omega_1 \mu_k^{(i)2} (m_1 s_0 - m_2)} \left[ ch(\alpha_k^{(i)} z_2) - cth \left( \frac{\mu_k^{(i)} l}{v_2} \right) sh(\alpha_k^{(i)} z_2) \right];$$

$$\tilde{S}_5(\alpha_k^{(i)} z_2) = \frac{n_2 R^{(i)2} \varepsilon_{\pm}}{\omega_1 \mu_k^{(i)2} (m_1 s_0 - m_2)} \left[ sh(\alpha_k^{(i)} z_2) - cth \left( \frac{\mu_k^{(i)} l}{v_2} \right) ch(\alpha_k^{(i)} z_2) \right].$$

Напружено-деформівний стан у пружному шарі з початковими (залишковими) напруженнями для нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$  визначимо з [4] через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля. Задовольнивши граничні умови (1) і (2), після ряду перетворень при  $y_3 = (-1)^{i+1} h_i$  ( $i=1, 2$ ) отримаємо

$$u_3 = \theta_1 \int_0^{\infty} \xi^{-1} \left( (q_1(\xi) - q_2(\xi)) \tilde{z}_i(\xi) + (-1)^{i+1} q_i(\xi) (1 - \tilde{z}_i(\xi)) \right) J_0(\xi r) d\xi, \quad Q_{33} = \omega_1 \int_0^{\infty} q_i(\xi) J_0(\xi r) d\xi, \quad (10)$$

де  $h^{(i)} = H^{(i)} / R^{(i)}$ ,  $\varphi_i = 2\xi h^{(i)} v_i^{-1}$ ,  $\theta_1 = m_1 (s_1 - s_3) v_1^{-1}$ ,  $\omega_1 = C_{44} l_1 (1 + m_1) (s - s_3)$ ;

$$q_i = A(s \operatorname{ch} \varphi_2 - s_3 \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{cth} \varphi_1) + (-1)^{i+1} B(s f_i(\varphi_2) - s_3 \operatorname{ch} \varphi_{e_i} (\operatorname{th} \varphi_1)^{(-1)^i});$$

$$f_1(x) = \operatorname{sh} x, \quad f_2(x) = \operatorname{ch} x, \quad e_i = 2^{i-1} + (-1)^{i+1};$$

$$\tilde{z}_1(\xi) = (s_3 \operatorname{ch} 2\varphi_2 (\operatorname{sh} 2\varphi_1)^{-1} - s) \left[ (s \operatorname{ch} \varphi_2 - s_3 \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{cth} \varphi_1) (s \operatorname{sh} \varphi_2 - s_3 \operatorname{ch} \varphi_2 \operatorname{th} \varphi_1) \right]^{-1};$$

$$\tilde{z}_2(\xi) = (s \operatorname{sh} \varphi_2 - (s_3 \operatorname{cth} \varphi_1 + 1) \operatorname{sh} \varphi_1) \left[ s \operatorname{ch} \varphi_2 - s_3 \operatorname{sh} \varphi_2 \operatorname{cth} \varphi_1 \right]^{-1}.$$

В (9) – (10) значення коефіцієнтів  $n_i$ ,  $m_i$ ,  $c_{44}$ ,  $l_i$  наведені у [10].

**Метод розв'язання.** Використовуючи розв'язки для циліндра (9) й задовольняючи граничні умови (1) – (7), знайдемо власні значення задачі для випадку нерівних коренів  $n_1 \neq n_2$

$$\gamma_k = \pi(2k+1)H^{-(i)}, \quad \alpha_k^{(i)} = \frac{\mu_k^{(i)}}{R^{(i)}}, \quad \text{де } J_1(\mu_k^{(i)}) = 0. \quad (11)$$

Враховуючи граничні умови, сталі  $A(\xi)$ ,  $B(\xi)$ ,  $\chi_k^{(i)}$  визначимо із системи парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^{\infty} \frac{q_i(\xi)}{\xi} (1 - \bar{z}_2(\xi) + \bar{z}_1(\xi)) J_0(\xi r) d\xi = f_i(r) + \int_0^{\infty} \frac{q_{2^{2-i}}(\xi)}{\xi} \bar{z}_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi, \quad (r < R^{(i)});$$

$$\int_0^{\infty} q_i(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad (r > R^{(i)}), \quad (i=1, 2),$$

$$\text{де } f_i(r) = (-1)^i \varepsilon_{\pm} \omega_1 \left[ (1 - \chi_0^{(i)}) - (\omega_1^0)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(i)} J_0(\mu_k^{(i)} r) \right] \cdot \omega_1^0 = 2\nu_1.$$

Введемо позначення

$$q_i(\xi) = \xi \int_0^{R^{(i)}} \tilde{\theta}_i(u) \cos(\xi u) du \quad (i=1, 2) \quad (13)$$

та зведемо (12) до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду відносно функції  $\tilde{\theta}_i(t)$

$$\int_0^{R^{(i)}} \frac{\tilde{\theta}_i(u) du}{\sqrt{r^2 - u^2}} = f_i(r) + \int_0^{R^{(i)}} \tilde{\theta}_i(u) du \int_0^{\infty} \bar{z}_2(\xi) \cos(\xi u) J_0(\xi r) d\xi +$$

$$+ (-1)^i \int_0^{\infty} \left( \int_0^{R^{(1)}} \tilde{\theta}_1(u) \cos(\xi u) du - \int_0^{R^{(2)}} \tilde{\theta}_2(u) \cos(\xi u) du \right) \bar{z}_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi, \quad 0 \leq r < R^{(i)}.$$

Пропускаючи деякі викладки, матимемо

$$\int_0^{R^{(i)}} \tilde{\theta}_i(u) du = - \frac{\varepsilon_{\pm} E^{(i)} R^{(i)}}{2\omega_1 H^{(i)}} \chi_0^{(i)}. \quad (15)$$

Систему (14) будемо шукати методом послідовних наближень. При  $R^{(1)} = R^{(2)} = R$ , тоді дана задача співпадає із задачею про тиск пружного циліндричного штампа радіуса  $R$  на пружний шар з початковими напруженнями [8 – 9]. Нульовим наближенням для  $\tilde{\theta}_i(t)$  буде

$$\tilde{\theta}_i(u) = 1.$$

Наступні наближення визначимо за формулою

$$\tilde{\theta}_i^{(k)}(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{R^{(i)}} \tilde{\theta}_i^{(k-1)}(u) K(r, u) du + \frac{2}{\pi} \int_0^{R^{(i)}} \tilde{\theta}_i^{(k-1)}(u) H(r, u) du,$$

$$\text{де } H(r, u) = \int_0^{\infty} (\bar{z}_2(t) - \bar{z}_1(t)) \cos(tu) \cos(rt) dt, \quad K(r, u) = \int_0^{\infty} \bar{z}_i(t) \cos(tu) \cos(rt) dt, \quad (i=1, 2).$$

Розв'язок (14) запишемо у вигляді

$$\tilde{\theta}_i(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\theta}_i^{(k)}(u), \quad (i=1, 2). \quad (16)$$

Аналогічно [8–9] для визначення сталих  $\chi_k^{(i)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$ ) отримаємо нескінченні системи алгебраїчних рівнянь

$$\alpha_k^{(i)} \chi_k^{(i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{kn}^{(i)} \chi_n^{(i)} = \beta_k^{(i)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2). \quad (17)$$

Коефіцієнти системи можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(i)} = \beta_0^{(i)} = 0; \quad \alpha_{00}^{(i)} &= \frac{3E^{(i)}}{\omega_1 l}; \\ \alpha_{0n}^{(i)} &= \frac{2\varepsilon_{\pm}}{\pi} \left[ \psi_0(0, \mu_n^{(i)}) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} \tilde{z}_i(hu) \psi_{j-1}(u, \mu_n^{(i)}) du \right]; \\ \alpha_k^{(i)} = -\tau_k^*; \quad \alpha_{k0}^{(i)} = \beta_k^{(i)} &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\psi_{j-1}(u, \mu_k^{(i)})}{u} \tilde{z}_i(hu) \psi_{j-1}(u, 0) du; \\ \alpha_{kn}^{(i)} &= \frac{2}{\pi} \left[ \psi_0(\mu_n^{(i)}, \mu_k^{(i)}) - \frac{R^2 \pi}{4} \sum_{m=1}^{\infty} t_{km}^{(i)*} B_n^{(i)} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\psi_{j-1}(u, \mu_k^{(i)})}{u} \tilde{z}_i(hu) \psi_{j-1}(u, \mu_n^{(i)}) du \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{де } \psi_j(\eta, \mu_k^{(i)}) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \eta t dt \int_0^{\infty} \frac{\psi_{j-1}(u, \mu_k^{(i)})}{u} \tilde{z}_i(uh) \cos ut du.$$

При обчисленні функції (16) й коефіцієнтів (18) більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються. Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції розкладаються у ряди по степенях  $\frac{1}{h}$ , що дозволяє обчислити коефіцієнти систем (17) наближено.

Використовуючи умову рівноваги, встановимо зв'язок між осадом торців штампів та рівнодіючою навантаження  $P$

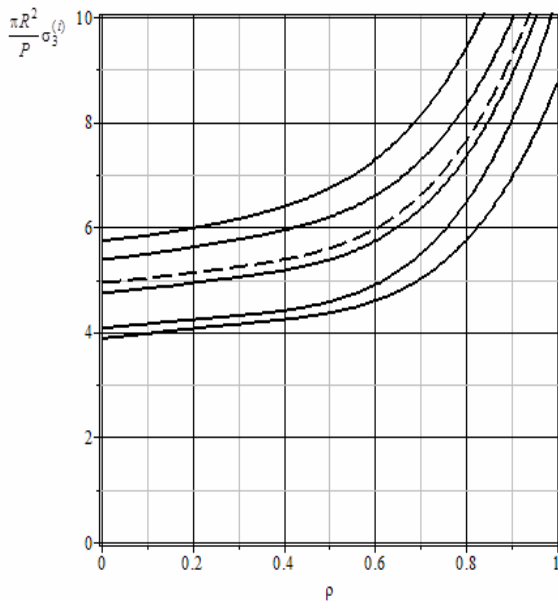
$$P = \frac{6\pi R^{(i)2} E^{(i)}}{\omega_1 l} \chi_0^{(i)}.$$

Визначивши невідомі сталі  $\chi_k^{(i)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2$ ) із систем (17), можна обчислити напружено-деформівний стан як у пружних штампах, так і в шарі за формулами (9)–(10).

У результаті цього розв'язок представлений у вигляді рядів через нескінченну систему констант, що визначаються із систем регулярних лінійних алгебраїчних рівнянь.

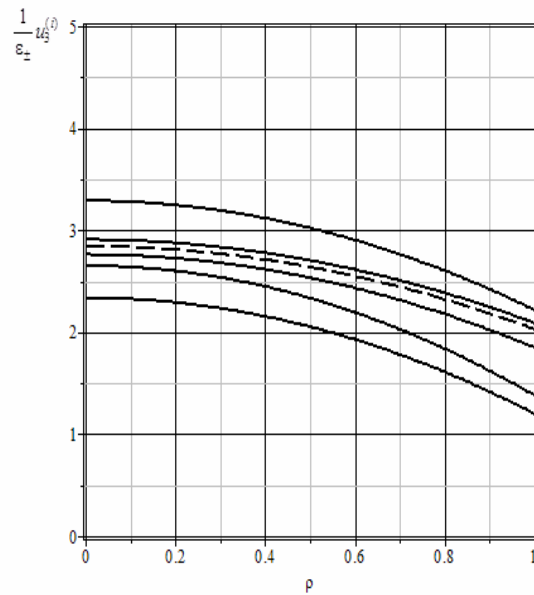
**Чисельний аналіз.** Система (17) розв'язана методом редукції для потенціалу Трелоара (неогуківські тіла) при таких значеннях параметрів:  $k=n=32$ ;  $\nu = \nu_1 = 0,5$ ;  $l=10$ ;  $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 1; 1,1; 1,2$ . На рис.2 представлений розподіл контактних напружень під штампами  $\frac{\pi R^2}{P} \sigma_3^{(i)}$ , а на рис.3 – переміщення у пружних штампах  $\frac{1}{\varepsilon_{\pm}} u_3^{(i)}$  при  $\xi=1$ .





**Рисунок 2.** Розподіл контактних напружень

**Figure 2.** Distribution of contact stresses



**Рисунок 3.** Переміщення у пружних штампах при  $\xi=1$

**Figure 3.** Moving in elastic dies at  $\xi=1$

На рис. 2, 3 пунктирні лінії відповідають переміщенню й напруженню за відсутності початкових напружень ( $\lambda_1 = 1$ ), суцільні – з початковими напруженнями.

**Висновки.** Вплив початкових напружень на напружено-деформований стан пружних циліндрів, що втискаються у пружний шар, полягає в тому, що початкові напруження в шарі призводять у випадку стиснення до зменшення напружень у пружних штампах, а у випадку розтягу – до їх збільшення, для переміщень – навпаки. Найбільший вплив початкових напружень виявлено на боковій поверхні штампів.

Початкові напруження у пружному шарі призводять до суттєвої зміни закону розподілу контактних напружень. При цьому у випадку стискання контактні напруження значно зменшуються, а у випадку розтягнення – збільшуються. Переміщення ж у випадку стискання значно збільшуються, а при розтягненні – зменшуються.

Суттєвіший вплив кількісного характеру початкові (залишкові) напруження створюють у високоеластичних матеріалах порівняно з жорсткішими матеріалами; якісний вплив має ідентичний характер.

При наближенні початкових (залишкових) напружень до значень, що відповідають поверхневій нестійкості шару, з'являються ефекти «резонансного» характеру не тільки у шарі, але й у пружних циліндричних штампах, які полягають у тому, що напруження наближаються до нуля, а переміщення необмежено зростають.

**Conclusions.** Influence of initial stresses on the stress-strain state of an elastic cylindrical punches, which are pressed into an elastic layer, is that the initial stress in the layer in the case of compression reduce the stress in elastic punches, and in the case of stretching increase it. For displacements, on the contrary, the greatest impact of initial stress was found on the side of punches surfaces.

Initial tension in an elastic layer leads to a significant change in the law of distribution of contact stresses, while in the case of compression contact stresses are significantly reduced, in the case of stretching – increased; displacement in the case of compression significantly increases, and in the case of tension it is reduced.

A significant influence of quantitative initial (residual) tension is created in the highly elastic materials compared to more rigid materials; the qualitative effect is similar.

When initial stresses approach the values that correspond to the surface layer instabilities, effects of the «resonant» character appear not only in the layer, but also in the elastic cylindrical punches. This means that tension vanishes and displacements increase indefinitely.

#### **Список використаної літератури**

1. Гузь, А. Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (жесткие штампы) [Текст] / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1989. – №8. – С. 3–18.
2. Гузь, А. Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (упругие штампы) (обзор) [Текст] / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27, №9. – С. 3–28.
3. Guz, A. N. Contact problems for elastic bodies with initial stresses. Focus on Ukrainian research / A. N. Guz, S. Y. Babich, V. B. Rudnitsky // Apple Mech. Rev. Vol. 51, nos May 1998. – P. 343–371.
4. Гузь, А. Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. – Хмельницький, изд. ПП Мельник. – 2006. – 710 с.
5. Рудницкий, Т. В. Контактное взаимодействие конечного цилиндрического штампа и полупространства с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / Т. В. Рудницкий // Сборник международной конференции «Современные проблемы механики», посвященный 100-летию Л. А. Галина. Тезисы докладов. – Москва. – 2012. – С. 90.
6. Бабич, С. Ю. К вопросу контактной задачи для предварительно напряженного слоя [Текст] / С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1987. – 23, №5. – С. 110–112.
7. Гузь, А. Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями [Текст] / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, №8. – С. 3–11.
8. Ярецька, Н. О. Змішана статична контактна задача для пружного шару і пружного циліндричного штампа з початковими (залишковими) напруженнями [Текст] / Н. О. Ярецька // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2013. – №2(70). – С. 63–73.
9. Ярецька, Н. О. Про контактну задачу для циліндричного штампа і шару з початковими (залишковими) напруженнями [Текст] / Н. О. Ярецька // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2013. – № 4 (72). – С. 68–77.
10. Гузь, А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [Текст] / А. Н. Гузь. – Киев: Наук. думка, 1983. – 286 с.

*Отримано 27.02.2015*